数理解析研究所講究録
488巻 1983年 59-65

葉層 C^*環と竹崎の双対定理

京大数理研 山上 滋 (Shigeru Yamagami)

与えられた葉層 (M, F) から，竹崎の双対に相当する新しい葉層 $(\hat{M}, \hat{F})$ を構成する。作用素環における竹崎の双対が semi-finite になる事実に対応して，$(\hat{M}, \hat{F})$ は Lebesgue measure class の横断測度をもつことが示される。さらに，$(\hat{M}, \hat{F})$ の葉層 C^*環は (M, F) のそれの作用素環における竹崎－高井の双対であることが示される。

$\boxed{1}$ M を C^∞ 多様体，F を接束 TM の integrable subbundle とし，F によって M の葉層を定めるとする。葉層 (M, F) のグラフを G で表す。F の 1-density bundle $|\Lambda F^*|$ の C^∞ section D，及び TM の 1-density bundle の C^∞ section μ で，各点で正の値をとるものを考える。Source map $s: G \to M$ による D のひきもどしを ν_D で表す。ν_D は G の transverse function である。μ と ν_D で定まる G の transverse measure を $\frac{d\mu}{dD}$ で表す。M の foliated coord. nbd による covering $\{\Omega_\alpha, t_\alpha^1, \cdots, t_\alpha^q,$

$u_\alpha^1, \cdots, u_\alpha^p\}$ を用意する（但し，$t_\alpha^1, \cdots, t_\alpha^q$ は transversal coord.）。Ω_α の上では $\mu = \mu_\alpha \, |dt_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dt_\alpha^q \wedge du_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge du_\alpha^p|$，$D = D_\alpha \times |du_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge du_\alpha^p|$ と表わされる。Ω_α での leaf に沿った 1-form θ_α を $\theta_\alpha = d_F \log \frac{\mu_\alpha}{D_\alpha} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial u_\alpha^j} \left(\log \frac{\mu_\alpha}{D_\alpha} \right) du_\alpha^j$ で定義する。このとき，$\{t_\alpha, u_\alpha\}$ が foliated coord. であることから，$\theta_\alpha = \theta_\beta$ on $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ が成り立ち，M の leaf に沿った 1-form θ が定まる。

<u>Lemma</u> transverse measure $\frac{d\mu}{dD}$ の module δ は次の式で与えられる．

$$(1) \qquad \delta([\gamma]) = \exp \int_\gamma \theta \quad 。$$

ここで，γ は F に接する piece-wise C^∞ path であり，$[\gamma]$ は γ の G における class である。

$\boxed{2}$ θ を $\boxed{1}$ で定義した 1-form とする。θ を用いて $\hat{M} = M \times \mathbb{R}$ の上に foliation を作る。

$$(2) \qquad \hat{F} = \left\{ X \oplus -\theta(X) \frac{\partial}{\partial \tau} \in T_{(x,\tau)}(M \times \mathbb{R}) \, ; \; X \in F_x \right\}$$

とおくと，$\hat{F}$ は $T\hat{M}$ の integrable subbundle であることがわかる（integrability は θ が closed であることから従う）。従って $\hat{M}$ の上の foliation を定める。$(\hat{M}, \hat{F})$ の構成は θ を通じて (μ, D) の取り方によるが，foliation としては (μ, D) の取り方によらない。すなわち，

Lemma (μ_j, D_j) $(j=1,2)$ から上のようにして作られた foliation を $(\hat{M}_j, \hat{F}_j)$ で表すとき，$(\hat{M}_1, \hat{F}_1)$ と $(\hat{M}_2, \hat{F}_2)$ とは foliation として同型である。

$\boxed{3}$ Proposition. $(\hat{M}, \hat{F})$ は Lebesgue measure と同値な transverse measure をもつ。

∵) $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$ を第1成分への projection とし，foliation $(\hat{M}, \hat{F})$ に対する density の組 $(\hat{\mu}, \hat{D})$ を次のように選ぶ。

$$(3) \qquad \hat{D} = \pi^* D, \quad \hat{\mu} = \pi^*\mu \otimes e^{\tau} d\tau .$$

$(\hat{M}, \hat{F})$ の transverse measure とグラフの上の transverse measure で module が trivial なものとは1対1の対応があるから，transverse measure $\frac{d\hat{\mu}}{d\hat{D}}$ の module $\hat{\delta}$ が trivial であることを示せばよい。これは $\boxed{1}$ Lemma により，$\hat{\theta} = d_{\hat{F}} \log \frac{\hat{\mu}}{\hat{D}}$ が消えることをいえばよい。$X \in F$ に対して $\hat{X} = X \oplus -\theta(X)\frac{\partial}{\partial \tau}$ とおくと，

$$\begin{aligned} \hat{X}\left(\log \frac{\hat{\mu}}{\hat{D}}\right) &= \hat{X}\left(\pi^*\left(\log \frac{\mu}{D}\right) + \tau\right) \\ &= X\left(\log \frac{\mu}{D}\right) - \theta(X) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Proposition. (i) $\{\sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を transverse measure $\frac{d\mu}{dD}$ に付随した $C^*(M,F)$ の modular automorphism group とする。このとき

$$C^*(M,F) \cong C^*(M,F) \rtimes_\sigma \mathbb{R}\ .$$

(ii) $\{\hat{\sigma}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ を $\hat{M}$ の $\mathbb{R}$-成分の translation によって得られる $C^*(\hat{M},\hat{F})$ の automorphism group とする。このとき $\{\hat{\sigma}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ は ((i)の同型を通して) σ の dual action に一致する。特に, $\dim F \geqq 1$ ならば

$$C^*(M,F) \cong C^*(\hat{M},\hat{F}) \rtimes_{\hat{\sigma}} \mathbb{R}$$

証明の前に Lemma を1つ用意する。

$\boxed{5}$ <u>Lemma</u>. $(\hat{M},\hat{F})$ のグラフを $\hat{G}$ で表すとき, $\hat{G}$ は $G\times\mathbb{R}$ に次の groupoid operation を入れたもので同型である。

$$(4)\ \begin{cases} r(\gamma,\tau) = (r(\gamma),\tau) \\ s(\gamma,\tau) = (s(\gamma), \tau + \log\delta(\gamma)) \\ (\gamma_1,\tau_1)\cdot(\gamma_2,\tau_2) = (\gamma_1\gamma_2, \tau_1) \end{cases}$$

さらに $\hat{M}$ の $\mathbb{R}$-成分の translation から ひき起される $\hat{G}$ の 1-parameter automorphism group は $G\times\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}$-成分の translation によって与えられる。

$\boxed{6}$ <u>$\boxed{4}$ の証明.</u> まず $C^*(M,F)$ の定義を復習しておこう。G の上の連続関数で support が compact になるもの全体の作る convolution algebra を $C_c(G)$ で表す。($C_c(G)$ の convolution は $(f_1 * f_2)(\gamma) = \int \nu_D^{r(\gamma)}(d\gamma')\, f_1(\gamma')\, f_2(\gamma'^{-1}\gamma)$ で与えられる。)

$C_c(G)$ の $L^2(G, \mu\circ\nu_D)$ での bounded 表現 R を

(5) $\quad R(f)\xi = \xi * \tilde{f}$, $\xi \in L^2(G, \mu\circ\nu_D)$, $f \in C_c(G)$

で定義する ($\tilde{f}(\gamma) = f(\gamma^{-1})$)。 $C^*(M,F)$ は $\{R(f); f \in C_c(G)\}$ によって生成される C^*-algebra である。$\hat{G}$ については、transverse function として ν_D の $\pi: \hat{G} = G \times \mathbb{R} \to G$ によるひきもどし $\hat{\nu}_D$ をとり、unit space $\hat{G}^{(0)} = G^{(0)} \times \mathbb{R} = M \times \mathbb{R}$ の上の measure としては product measure $\hat{\mu} = \mu \otimes d\tau$ ($d\tau$ は Lebesgue measure) をとる。$C_c(\hat{G})$ の表現 $\hat{R}$ が $L^2(G\times\mathbb{R}, \hat{\mu}\circ\hat{\nu}_D = (\mu\circ\nu_D)\otimes d\tau)$ の上に作られる。$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、関数 $\gamma \mapsto \delta(\gamma)^{-i\lambda}$ の multiplication operator を u_λ で表す。$\frac{d\mu}{dD}$ に付随した $C^*(M,F)$ の modular automorphism group σ_λ は

(6) $\quad \sigma_\lambda R(f) = u_\lambda R(f) u_\lambda^*$

で与えられる。$\xi(\lambda) \mapsto u_\lambda^* \xi(\lambda)$ で定められる $L^2(G\times\mathbb{R}, (\mu\circ\nu_D)\otimes d\tau)$ での unitary operator を U_1 で、$L^2(G\times\mathbb{R}, (\mu\circ\nu_D)\otimes d\tau)$ の $\mathbb{R}$-component の Fourier 変換を U_2 で表す。最後に $U = U_1 U_2$ とおく。このとき簡単な計算により、$U \cdot R(f) \cdot U^{-1}$ が $C^*(M,F) \rtimes_\sigma \mathbb{R}$ の regular 表現と一致し、σ の dual action が $G\times\mathbb{R}$ の $\mathbb{R}$ 成分の translation で与えられることがわかる。$\dim F \geq 1$ のとき、$C^*(M,F) \cong C^*(\hat{M}, \hat{F}) \rtimes_{\hat{\sigma}} \mathbb{R}$ となるのは foliation C^*-algebra の stability $C^*(M,F) \otimes \mathcal{K} \cong C^*(M,F)$ ([4]) からわかる。

$\boxed{7}$ <u>Example</u>（[2]）. Γ を $SL(2,\mathbb{R})$ の discrete subgroup で $M = SL(2,\mathbb{R})/\Gamma$ が compact になるものとする。M に foliation の構造を $SL(2,\mathbb{R})$ の subgroup $N = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix} ;\ a>0,\, b>0 \right\}$ の左からの作用により入れる。$SL(2,\mathbb{R})$ の Lie algebra の basis X_+, X_0, X_- を

$$(7) \qquad X_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\quad X_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ととる。$SL(2,\mathbb{R})$ の volume density μ を

$$(8) \qquad \mu(X_-\cdot g \wedge X_0\cdot g \wedge X_+\cdot g) = 1 \quad , g \in SL(2,\mathbb{R})$$

で、N の left flow に沿った density D を

$$(9) \qquad D(X_-\cdot g \wedge X_0\cdot g) = 1 \quad , g \in SL(2,\mathbb{R})$$

で定める。μ と D は $SL(2,\mathbb{R})$ の右からの作用で不変であるから、M の上の density をひきおこす。$SL(2,\mathbb{R})$ の岩沢分解

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^{-u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

を使えば、(t, u, v) が M の foliated coord. を与えることがわかる（t が transversal, u, v が tangential）。μ, D をこの coord. に関して表わせば

$$(10) \begin{cases} \mu\left(\dfrac{\partial}{\partial v} \wedge \dfrac{\partial}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial}{\partial t}\right) = e^{2u} \\ D\left(\dfrac{\partial}{\partial v} \wedge \dfrac{\partial}{\partial u}\right) = 1 \end{cases}$$

であることがわかる。従って (μ, D) に付随した 1-form θ は

$$(11) \qquad \theta = 2du$$

で与えられる。さて diffeo. $\hat{M} = M \times \mathbb{R} \ni (g\Gamma, \tau) \mapsto g e^{\tau} \Gamma \in GL_+(2,\mathbb{R})/\Gamma$ （$GL_+(2,\mathbb{R}) = \{ g \in GL(2,\mathbb{R});\ \det g > 0 \}$）により、

foliation $\hat{F}$ を書き直せば、$\hat{G}L_+(2,\mathbb{R})$ の subgroup $\hat{N}=\left\{\begin{bmatrix} e^{\lambda} & 0 \\ \nu & e^{3\lambda}\end{bmatrix};\ \lambda,\nu\in\mathbb{R}\right\}$ による left flow で与えられることがわかる。これをさらに diffeo. $M\times\mathbb{R}\ni(g\Gamma,\lambda)\mapsto\begin{bmatrix} e^{\lambda} & 0 \\ 0 & e^{3\lambda}\end{bmatrix}g\Gamma\in\hat{G}L_+(2,\mathbb{R})/\Gamma$ により書き直すと、$(\hat{M},\hat{F})$ は $M\times\mathbb{R}$ の foliation で各 leaf が $N'g\Gamma\times\mathbb{R}$ $(g\in SL(2,\mathbb{R}))$ の形のものと同型であることがわかる。ここで N' は $N'=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \nu & 1\end{bmatrix}\right\}$ なる N の subgroup である。従って N' の left flow による M の foliation を F' で表せば

$$(12)\qquad C^*(\hat{M},\hat{F})\cong C^*(M,F')\otimes\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}))$$

であることがわかる。

Reference

[1] A. Connes, Sur la théorie non commutative de l'integration, Lect. Notes in Math., 725

[2] ________, The von Neumann algebra of a foliation, Lect. Notes in Phys., 80, 145-151.

[3] ________, A Survey of Foliations and Operator Algebras, Proc. Symp. A.M.S. vol 38, 521-628.

[4] Hilsum-Skandalis, Stabilite des C^*-algebres de feuilletages, preprint (1982).

[5] S. Yamagami, Modular Cohomology Class of Foliation and Takesaki's Duality, RIMS preprint (1982).